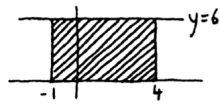


## 5장 적분 연습문제 해답

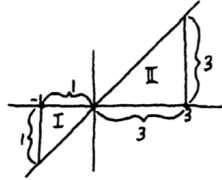
### 5.1 개요

### 5.2 적분의 정의와 응용

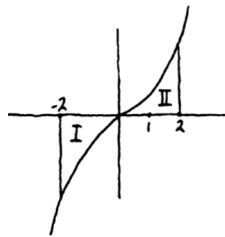
1. (a)  $\int_{-1}^4 6dx =$  그래프 아래의 넓이  $= 5 \times 6 = 30$



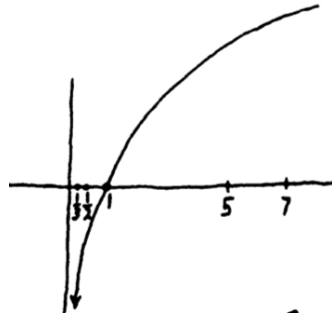
- (b)  $\int_{-1}^3 xdx =$  넓이 II - 넓이 I  $= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$



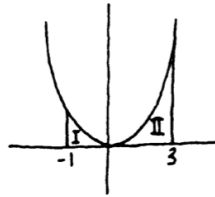
- (c)  $\int_{-2}^2 x^3 dx = II - I = 0$



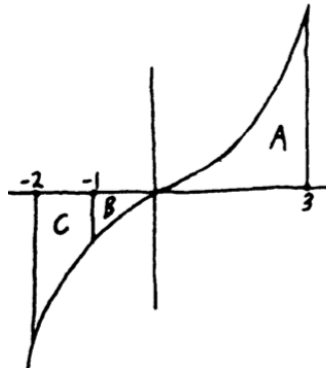
2. (a)  $\int_1^5 \ln x dx$   
 (b)  $-\int_{1/2}^1 \ln x dx$   
 (c)  $\int_1^7 \ln x dx - \int_{1/3}^1 \ln x dx$



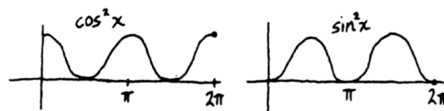
3. (a)  $\int_0^3 x^2 dx = II$ ,  $\int_{-1}^3 x^2 dx = I + II$  (더 큼)



- (b)  $\int_0^3 x^3 dx = A$ ,  $\int_{-1}^3 x^3 dx = A - B$  (더 작음)



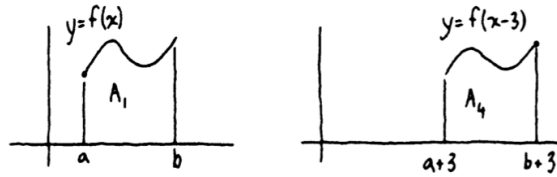
- (c) (위 그림 참고)  $\int_{-1}^0 x^3 dx = -B$ ,  $\int_{-2}^0 x^3 dx = -(C + B)$  (더 작음)
4. (a) 위보다 아래 넓이가 더 크다. 따라서 음수  
 (b)  $\cos^2 x$ 는 항상  $\geq 0$ 이므로 그래프는  $x$ -축 위에 놓여 있다. 따라서 적분값은 양수여야 한다.
5. (a) 참 (그래프가  $x$ -축 아래에 놓여 있는 경우를 생각해 보라. 적분값 = - 넓이 = 음수)  
 (b) 거짓. 위 연습문제 1(c)를 보라.  $\int_{-2}^1 x^3 dx < 0$ 이지만 (아래쪽 넓이가 위쪽 넓이보다 큼) 구간  $[-2, 1]$  전체에서  $x^3$ 이  $< 0$ 은 아니다.  
 (c) 참.  $f$ 의 그래프가  $g$ 의 그래프의 아래쪽에 있다면 “ $f$ 의 넓이”는 “ $g$ 의 넓이”보다 작거나 같다. 다르게 말하자면  $f(x) \leq g(x)$ 이면  $\sum f(x)dx \leq \sum g(x)dx$ 이다.
6. (a)  $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서  $\cos^2 x$  아래의 넓이는  $\sin^2 x$  아래의 면적과 같다. 따라서 적분값은 동일하다 (아래 그림 참조)



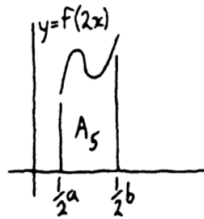
(b)  $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 x) dx = \int_0^{2\pi} 1 dx - \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$  이다. 그런데  $\int_0^{2\pi} dx =$  (밑변이  $2\pi$  이고 높이가 1 인) 직사각형의 면적  $= 2\pi$  이고 (a)의 결과에 의해  $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$  이다. 따라서  $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = 2\pi - \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$  이고,  $2 \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = 2\pi$ , 즉  $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \pi$  이다.

7.  $A_1 = x = a$ 와  $x = b$  사이의  $f$ 의 그래프의 아래 넓이

(a) (아래 그림 참조)  $f$ 의 그래프와 구간  $[a, b]$ 가 모두 같이 이동한다면 동일한 넓이일 것이다.  $A_2$ 은 구간은 오른쪽으로 3만큼 이동하지만 그래프는 이동하지 않는 경우이고  $A_3$ 은 구간은 오른쪽으로 3만큼 이동하고 그래프는 왼쪽으로 3만큼 이동한 경우이다.  $A_4$ 가 그래프와 구간 모두 오른쪽으로 3만큼 이동한 경우이다. 따라서  $A_1 = A_4$ 이다.



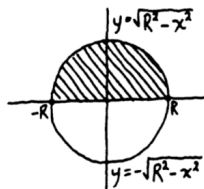
(b) (아래 그림 참조)  $A_5$ 에서는 그래프와 구간이 모두 수평방향으로  $1/2$ 씩 줄어들었다. 이렇게 만들어진 새로운 넓이는 예전 넓이의 반이므로  $A_5 = \frac{1}{2}A_1$ 이다.



8. (a) 10 (임시 변수를 바꾸어도 적분값은 달라지지 않는다)

(b)  $\int_a^b 4x^3 dx = 10$  그러므로  $4 \int_a^b x^3 dx = 10$  이고  $\int_a^b x^3 dx = 10/4$ .

9. 원  $x^2 + y^2 = R^2$ 을 생각하자 (아래 그림 참조). 위쪽 반원의 넓이는  $x = -R$ 과  $x = R$  사이에  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$  그래프의 아래에 해당한다. 반원의 넓이  $= \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$  이고 원의 넓이는  $2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$  이다.



### 5.3 미분적분학의 기본정리

$$1. (2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x) \Big|_{-1}^2 = 14 - (-\frac{11}{2}) = \frac{39}{2}$$

$$2. (3t - \frac{1}{2}t^2) \Big|_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2$$

$$3. \left( \frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{80}{3} - 0 = \frac{80}{3}$$

$$4. -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$5. \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$6. -(1/\pi) \cos \pi x \Big|_0^{1/2} = 0 - (-1/\pi) = 1/\pi$$

$$7. \ln x \Big|_1^5 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$$

$$8. -1/12x^2 \Big|_2^3 = -\frac{1}{108} - (-\frac{1}{48}) = \frac{5}{432}$$

$$9. 2x^{3/2} \Big|_1^5 = 2\sqrt{5^3} - 2 = 10\sqrt{5} - 2$$

$$10. -\frac{2}{3}(10-x)^{3/2} \Big|_1^9 = -\frac{2}{3} - (-\frac{2}{3}\sqrt{9^3}) = -\frac{2}{3} + \frac{54}{3} = \frac{52}{3}$$

$$11. \frac{1}{2} \ln(2x+1) \Big|_3^4 = \frac{1}{2} \ln 9 - \frac{1}{2} \ln 7$$

$$12. 4(5 - (-2)) = 28$$

$$13. \tan x \Big|_0^{\pi/4} = 1 - 0 = 1$$

$$14. \int_2^5 1 dx = 1(5 - 2) = 3$$

$$15. \int_{-1}^2 (x^6 + 4x^3 + 4) dx = \left( \frac{1}{7}x^7 + x^4 + 4x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{296}{7} - (-\frac{22}{7}) = \frac{318}{7}$$

$$16. \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2}x + 7 \right)^4 \cdot 2 \Big|_2^4 = \frac{1}{8} (9^4 - 8^4) = \frac{2465}{8}$$

$$17. \frac{1}{8} \left( \frac{x+3}{5} \right)^8 \cdot 5 \Big|_{-1}^1 = \frac{5}{8} \left[ \left( \frac{4}{5} \right)^8 - \left( \frac{2}{5} \right)^8 \right]$$

$$18. \frac{1}{3} \ln |x| \Big|_{-5}^{-4} = \frac{1}{3} \ln 4 - \frac{1}{3} \ln 5$$

$$19. (10/\pi) \sin \frac{1}{2} \pi x \Big|_{-3}^0 = 0 - 10/\pi = -10/\pi$$

$$20. -1/4(2x-9)^2 \Big|_2^3 = -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{25} \right) = -\frac{4}{225}$$

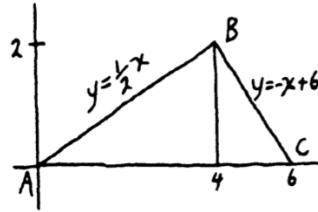
$$21. \frac{1}{3} e^{3x} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{3}$$

22. 아래 그림 참조

(a) 밑변  $\overline{AC} = 6$ , 높이 = 2, 면적 =  $\frac{1}{2}bh = 6$

(b) 직선 AB의 방정식은  $y = \frac{1}{2}x$ , 직선 BC의 방정식은  $y = -x + 6$ .

$$\begin{aligned}\text{넓이} &= \int_0^4 \frac{1}{2}x dx + \int_4^6 (-x + 6) dx \\ &= \frac{1}{4}x^2 \Big|_0^4 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + 6x\right) \Big|_4^6 = 4 + 2 = 6\end{aligned}$$



23.  $\frac{\int_0^\pi \sin x dx}{\pi - 0} = \frac{-\cos x \Big|_0^\pi}{\pi} = \frac{2}{\pi}$

24. (a)  $\frac{1}{4}x^4 + C$

(b)  $\frac{1}{4}x^4 \Big|_1^2 = \frac{15}{4}$

25.  $\int_2^3 5dx + \int_3^4 0dx + \int_4^6 x^3 dx = 5(3-2) + 0 + \frac{1}{4}x^4 \Big|_4^6 = 5 + 260 = 265$

26.  $4-x$ 는  $x < 4$ 이면 양수이고  $x > 4$ 이면 음수다. 따라서  $|4-x|$ 는  $x < 4$ 이면  $4-x$ 이고  $x > 4$ 이면  $-(4-x)$ 이다. 그러므로

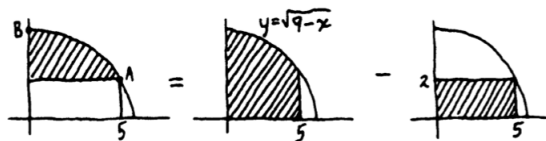
$$\begin{aligned}\int_3^1 0|4-x|dx &= \int_3^4 (4-x)dx + \int_4^{10} (x-4)dx \\ &= \left(4x - \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_3^4 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right) \Big|_4^{10} = \frac{1}{2} + 18 = \frac{37}{2}\end{aligned}$$

27. (a) 그래프는  $x = 0, 2, 4$ 에서  $x$ -축을 지난다.

$$\begin{aligned}\text{넓이} &= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx - \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx \\ &= \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right) \Big|_0^2 - \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right) \Big|_2^4 \\ &= 4 - (-4) = 8\end{aligned}$$

(b) (아래 그림 참조) 방법 1: 주어진 넓이 =  $\int_0^5 \sqrt{9-x} dx - 10 = -\frac{2}{3}(9-x)^{3/2} \Big|_0^5 - 10 = \frac{38}{3} - 10 = \frac{8}{3}$

방법 2: 점 B의 좌표는 (0, 3)이다. 반시계방향으로 축을 회전시켜  $x$ -축이 수직이고  $y$ -축이 왼쪽으로 뉘어지도록 하면 주어진 영역은  $x = 9 - y^2$ 의 그래프 아래에 해당하고  
 $\text{넓이} = \int_{y=2}^3 (9 - y^2)dy = \left(9y - \frac{1}{3}y^3\right) \Big|_2^3 = 18 - \frac{46}{3} = \frac{8}{3}.$



## 5.4 수치적분

1. (a)  $h = \frac{1}{4}$ ;

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0, & y_0 = f(x_0) = 1; \\ x_1 = \frac{1}{4}, & y_1 = f(x_1) = 1.0019512; \\ x_2 = \frac{1}{2}, & y_2 = f(x_2) = 1.0307764; \\ x_3 = \frac{3}{4}, & y_3 = f(x_3) = 1.1473475; \\ x_4 = 1, & y_4 = f(x_4) = 1.4142136; \end{array}$$

따라서

$$\frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = 1.0894134$$

(b)  $h = \frac{1}{6}$ ;

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0, & y_0 = f(x_0) = 1; \\ x_1 = \frac{1}{6}, & y_1 = f(x_1) = 0.027399; \\ x_2 = \frac{1}{3}, & y_2 = f(x_2) = 0.1053605; \\ x_3 = \frac{1}{2}, & y_3 = f(x_3) = 0.2231436; \\ x_4 = \frac{2}{3}, & y_4 = f(x_4) = 0.3677248; \\ x_5 = \frac{5}{6}, & y_5 = f(x_5) = 0.5273549; \\ x_6 = 1, & y_6 = f(x_6) = 0.6931472; \end{array}$$

따라서

$$\frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6) = 0.2639393$$

(c)  $h = \frac{1}{8}$ ;

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1, & y_0 = f(x_0) = 0.5; \\ x_1 = \frac{9}{8}, & y_1 = f(x_1) = 0.4125705; \\ x_2 = \frac{5}{4}, & y_2 = f(x_2) = 0.3386243; \\ x_3 = \frac{11}{8}, & y_3 = f(x_3) = 0.2778079; \\ x_4 = \frac{3}{2}, & y_4 = f(x_4) = 0.2285714; \\ x_5 = \frac{13}{8}, & y_5 = f(x_5) = 0.1889996; \\ x_6 = \frac{7}{4}, & y_6 = f(x_6) = 0.1572482; \\ x_7 = \frac{15}{8}, & y_7 = f(x_7) = 0.1317211; \\ x_8 = 2, & y_8 = f(x_8) = 0.1111111; \end{array}$$

따라서

$$\frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + y_8) = 0.2543498$$

(d)  $h = \frac{1}{6}$ ;

|                      |                             |
|----------------------|-----------------------------|
| $x_0 = 0,$           | $y_0 = f(x_0) = 1;$         |
| $x_1 = \frac{1}{6},$ | $y_1 = f(x_1) = 0.9992287;$ |
| $x_2 = \frac{1}{3},$ | $y_2 = f(x_2) = 0.9877302;$ |
| $x_3 = \frac{1}{2},$ | $y_3 = f(x_3) = 0.9394131;$ |
| $x_4 = \frac{2}{3},$ | $y_4 = f(x_4) = 0.8207548;$ |
| $x_5 = \frac{5}{6},$ | $y_5 = f(x_5) = 0.6173908;$ |
| $x_6 = 1,$           | $y_6 = f(x_6) = 0.3678794;$ |

따라서

$$\frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6) = 0.8449433$$

2.  $h = \frac{1}{4}$ ;

|                      |                               |
|----------------------|-------------------------------|
| $x_0 = 1,$           | $y_0 = f(x_0) = 1;$           |
| $x_1 = \frac{5}{4},$ | $y_1 = f(x_1) = 0.64;$        |
| $x_2 = \frac{3}{2},$ | $y_2 = f(x_2) = \frac{4}{9};$ |
| $x_3 = \frac{7}{4},$ | $y_3 = f(x_3) = 0.3265306;$   |
| $x_4 = 12$           | $y_4 = f(x_4) = 0.25;$        |

따라서

$$\frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = 0.5004176$$

$$\text{정확한 값은 } (-1/x) \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = 0.5$$

## 5.5 적분 불가능 함수

## 5.6 특이적분

1.  $-1/4x^4 \Big|_3^\infty = 0 + 1/4(81) = 1/324$
2.  $\frac{5}{6}x^{6/5} \Big|_2^\infty = \infty - \frac{5}{6} \cdot 2\sqrt[5]{2} = \infty$
3.  $-1/2x^2 \Big|_{-\infty}^{-2} = -\frac{1}{8} + 0 = -\frac{1}{8}$

$$4. -1/x \Big|_{-1}^{0-} = -(1/0-) - 1 = \infty$$

$$5. \ln x \Big|_{0+}^2 = \ln 2 - (-\infty) = \infty$$

$$6. \text{ 피적분함수가 } x = 0 \text{에서 발산한다. } \int_{-2}^{0-} 1/x^3 dx + \int_{0+}^3 1/x^3 dx = -1/2x^2 \Big|_{-2}^{0-} - 1/2x^2 \Big|_{0+}^3 = -(1/0+) + \frac{1}{8} - \frac{1}{18} + \frac{1}{0+} = -\infty + \infty. \text{ 적분은 발산하고 따라서 “답 없음”}$$

$$7. \tan^{-1} x \Big|_{-\infty}^0 = 0 - (-\pi/2) = \pi/2$$

$$8. \frac{1}{2}e^{4x} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$9. \text{ 피적분함수가 } x = 4 \text{에서 발산한다. } \int_2^{4-} + \int_{4+}^5 = -\frac{3}{2}(4-x)^{2/3} \Big|_2^{4-} - \frac{3}{2}(4-x)^{2/3} \Big|_{4+}^5 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} - \frac{3}{2}$$

$$10. 1/x^2 \text{ 이 } x = 0 \text{에서 발산한다. } \int_{-2}^{0-} + \int_{0+}^3 = -1/x \Big|_{-2}^{0-} - 1/x \Big|_{0+}^3 = \infty + \infty = \infty$$

$$11. 1/x \text{ 가 } x = 0 \text{에서 발산하고, 구간이 무한하므로 특이적분이다. } \ln x \Big|_{0+}^{\infty} = \infty - \infty. \text{ 적분은 발산한다.}$$

$$12. -\cos x \Big|_0^{\infty} = -\cos \infty + 1 \text{이지만, } \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x \text{가 존재하지 않는다. (} \cos x \text{는 } x \rightarrow \infty \text{일 때 -1과 1 사이에서 진동) 따라서 적분은 발산한다.}$$

$$13. e^{-|x|} \text{는 } x \geq 0 \text{이면 } e^{-x} \text{이고 } x < 0 \text{이면 } e^x \text{이다. } \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = e^x \Big|_{-\infty}^0 + (-e^{-x}) \Big|_0^{\infty} = 1 - 0 - 0 + 1 = 2$$

$$14. \tan x \text{가 } x = \pi/2 \text{에서 발산하기 때문에 특이적분이다. } -\ln \cos x \Big|_0^{(\pi/2)-} = \ln(0+) + \ln 1 = \infty + 0 = \infty$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} x/(x^2 + 1) = \lim x/x^2 \text{ (최고차수 법칙)} = \lim 1/x = 0. x \rightarrow -\infty \text{에 대해서도 유사하다. } \tan^{-1} \infty = \pi/2, \tan^{-1}(-\infty) = -\pi/2. F(\infty) - F(-\infty) = \frac{1}{2}[0 + \pi/2 - (0 - \pi/2)] = \pi/2$$

$$16. \ln x \text{가 } x = 0 \text{에서 발산하므로 특이적분이다. } \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x \text{는 } 0 \times \infty \text{이고 4.4절에서 본 것처럼 이 극한값은 0이다. 따라서 } (x \ln x - x) \Big|_{0+}^1 = -1.$$